PART4　共面条件

例題

空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ -1)$，D$(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

Point Pickup

練習

空間の 4 点 A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(4,\ 2,\ 3)$，C$(5,\ 2,\ 5)$，D$(-2,\ -1,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

第15講　PART4 確認問題

1　空間の４点 A(2, 0, 1)，B(0, 4, 2)，C(5, −1, 3)，D(1, 7, z) が同一平面上にあるとき，$z=$ ア である。

PART4　共面条件

例題

空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ -1)$, D$(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ -1)$ より，3 点 A，B，C は一直線上にない。

（解法 1）

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 2,\ z)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s，t が存在する。よって

$$(0,\ 2,\ z)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ -1)$$

したがって　$0=-s-t$，$2=2s$，$z=-t$

よって　$s=1$，$t=-1$

したがって $z=1$

（解法 2）

原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ -1)$$

したがって　$1=s$，$2=2t$，$z=-u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=1$，$t=1$，$u=-1$

したがって　$z=1$

練習

空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$ より，3 点 A，B，C は一直線上にない。

(解法 1)

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$ に対して

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t が存在する。よって

$$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$$

したがって　$-5=s+2t,\quad -2=s+t,\quad z-2=s+3t$

よって　$s=1$，$t=-3$

したがって　$z=-6$

(解法 2)

原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$$(-2,\ -1,\ z)=s(3,\ 1,\ 2)+t(4,\ 2,\ 3)+u(5,\ 2,\ 5)$$

したがって　$-2=3s+4t+5u,\quad -1=s+2t+2u,\quad z=2s+3t+5u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=3$，$t=1$，$u=-3$

したがって　$z=-6$

第15講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ -1,\ 2)$ [A]

これより，3点A，B，Cは一直線上にない

(解法1)

$\overrightarrow{AD}=(-1,\ 7,\ z-1)$

点Dが平面ABC上にあるとき，

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する。 [B]

このとき

$(-1,\ 7,\ z-1)=s(-2,\ 4,\ 1)+t(3,\ -1,\ 2)$

つまり　$-1=-2s+3t$　……①

$7=4s-t$　……②

$z-1=s+2t$　……③

①，②より　$s=2$，$t=1$

したがって，③より　$z=5$

(解法2)

原点をOとすると，点Dが平面ABC上にあるとき

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$(1,\ 7,\ z)=s(2,\ 0,\ 1)+t(0,\ 4,\ 2)$
$+u(5,\ -1,\ 3)$ [C]

つまり　$1=2s+5u$　……①

$7=4t-u$　……②

$z=s+2t+3u$　……③

また　$s+t+u=1$　……④

①，②，④より　$s=-2$，$t=2$，$u=1$

したがって，③より　$z=5$

[A]　2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

[B]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Dが平面 α 上にある
$\iff$ $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$
となる実数 s，t が存在する

[C]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Pが平面 α 上にある
$\iff$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$
$s+t+u=1$
を満たす実数 s，t，u が存在する